ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ.

При изучении данной темы широко используется материал в курсе алгебры 8 класса.

 Понятие параметра является важным математическим понятием, которое систематически используется в школьном курсе математики и в смежных дисциплинах. Задания с параметрами включены в ЕГЭ.

 С понятием параметра ( без употребления этого термина ) учащиеся встречаются уже в курсе алгебры 7 класса при изучении линейных уравнений ах = в, ах + ву = с с одной и двумя переменными, при изучении линейной функции у = кх + в; в курсе алгебры 8 класса при изучении квадратных уравнений.

 Главная мысль, которую должны усвоить учащиеся, что уравнения с параметром – это семейство уравнений. Определяемых параметром. Отсюда вытекает способ решения уравнения с параметром: в зависимости от структуры уравнения выделяются подмножества множества допустимых значений параметра и для каждого такого подмножества находится соответствующее множество корней уравнения. Этот смысл доводится до сознания учащихся путем рассмотрения конкретных примеров уравнений с параметрами.

 При решении уравнений с параметрами важно обратить внимание на запись ответа как составную часть решения уравнения. В ответе должно быть указано для каждого значения параметра ( или множество его значений ), сколько корней имеет это уравнение и какого вида.

 Упражнения, направленные на разъяснение смысла, что значит решить уравнение с параметром, и на выработку умений решать линейные и квадратные уравнения, содержащие один параметр.

 Занятие 1.**Что значит решить уравнение с параметром.**

Решим задачу: «В седьмом, восьмом и девятом классах учится 105 учащихся. В восьмом классе учащихся на n больше, чем в седьмом, а в девятом на 3 меньше, чем в седьмом. Сколько учащихся в каждом классе, если известно, что в каждом классе их не менее 30 человек.» Обозначим через х число учащихся в седьмом классе. Тогда учащихся в восьмом классе было х + п, а в девятом классе х – 3. Имеем уравнение х + х + п + х – 3 =105

которое после упрощения примет вид: 3х = 108 – п. В этом уравнении буквой **х** обозначено неизвестное число, а буква **п** выполняет роль известного числа ( хотя об **п** мы можем сказать лишь то, что **п**- натуральное число). Букву **п** в полученном уравнении называют параметром, а само уравнение – уравнением с параметром. Выразим **х** через **п.** Получим х = (108 – п)\3, или х = 36 – п\3. Отсюда заключаем. Что в седьмом классе было 36 – п\3, в восьмом 36 + 2п\3, в девятом 33 – п\3 учащихся. Но это не окончательный ответ. Из условия задачи следует, что в каждом классе было не менее 30 человек. Так как меньшее число учащихся может быть в седьмом или девятом классе, то должны выполняться неравенства 36 – п\3 больше 30 и 33 – п\3 больше или равно 30. Отсюда получаем, что п меньше или равно 9. Из этого, и так как числа 36 – п\3, 36 + 2п\3. 33- п\3

- должны быть натуральными, следует, что п кратно 3. Учитывая эти два условия ( п меньше или равно 9 и п кратно 3), заключаем, что п равно 3, 6 или 9. Таким образом, окончательный ответ на вопрос задачи мы можем записать в виде: в седьмом классе было 36 – п\3 учащихся, в восьмом 36 + 2п\3, в девятом 33 – п\3, при п = 3; 6;9.. иначе говоря, возможны три варианта: в седьмом . в восьмом и в девятом классах могло быть соответственно 35, 38, 32, или 34, 40, 31, или 33, 42, 30 учащихся.

 С понятием параметра мы встречаемся при изучении линейных и квадратных уравнений, линейных и дробно линейных функций. Хотя термин «параметр» не вводится. Так в квадратном уравнении у = а$x^{2}$ + ву +с, коэффициенты **а**, **в**, **с** являются параметрами, в уравнении у = кх + в коэффициенты **к** и **в** так же являются параметрами.

 Рассмотрим уравнение в(в – 1)х = $в^{2}$+в – 2, в котором буквой **х** обозначено неизвестное число. А буква **в** выполняет роль известного фиксированного числа. Это уравнение является линейным уравнением с параметром **в**. Придавая **в** различные значения, мы будем получать различные уравнения с числовыми коэффициентами.

Например: при в = 2 получаем уравнение 2х = 4, при в = - 0,5 – уравнение 0,75х = -2,25,

при в = 0 – уравнение 0х = -2.

 При различных значениях **в** мы будем получать различные уравнения из данного семейства уравнений, определяемых параметром **в**.

 Уравнение 2х = 4 имеет единственный корень, уравнение 0,75х = -2,25 так же имеет единственный корень, уравнение 0х = -2 не имеет корней, уравнение 0х = 0 имеет бесконечное множество корней.

 Мы видим, что в зависимости от значения параметра **в** могут представиться разные случаи: уравнение может иметь единственный корень, может иметь бесконечное множество корней, может вообще не иметь корней.

 Итак, решая уравнение в(в – 1)х = $в^{2}$ + в – 2, мы должны рассмотреть случаи:

1. Когда в(в – 1) $\ne 0$;
2. Когда в(в – 1) = 0 и $в^{2}$+ в – 2 $\ne 0$;
3. Когда в(в – 1) = 0 и $в^{2}$+ в – 2 =0.

В результате получим следующие возможные решения:

при **в** $\ne 0$ и **в** $\ne -1$ уравнение имеет единственный корень х = (в + 2)/в;

при в = 0 уравнение корней не имеет;

при в = 1 уравнение имеет бесконечное множество корней, любое число является его корнем.

 Таким образом, для уравнения в( в – 1) = $в^{2}$+ в – 2 мы выявили различные значения параметра **в** для каждого из которых определено соответствующее множество корней.

 Вообще, решить уравнение с параметром **в** – это значит установить соответствие. С помощью которого для каждого значения параметра **в** указывается множество корней соответствующего уравнения.

 Заметим, что если уравнение содержит параметр **а**, то допустимыми значениями параметра **а** считаются все те значения **а**, при которых выражения, входящие в уравнение имеют смысл. Например, допустимыми значениями параметра **а** в уравнении 5ах + 9 = 2а являются любые действительные числа, а в уравнении 8/(а – 2) + 15/ (х – 1) = 7 – все действительные числа отличные от 2. Если же уравнение с параметром составлено по условию задачи, то допустимыми значениями параметра считаются те, которые отвечают реальному смыслу задачи. Например, если параметром **а** обозначено число людей, то **а** может быть лишь натуральным числом.

 Занятие 2. **Решение линейных и квадратных уравнений с параметром***.*

Рассмотрим примеры решения уравнений с одним параметром.

Пример 1. Решим относительно **х** уравнение х($а^{2}$ – 1) = (а + 1)(1 – х).

Раскроем скобки и перенесем слагаемые, содержащие неизвестные, в одну часть уравнения, а слагаемые, содержащие известные. В другую часть уравнения. Получим уравнение, линейное относительно **х**: а(а + 1)х = а + 1 .

Если **а** не равно нулю и **а** не равно -1, то х = 1/а. если а = 0, то уравнение примет вид 0х = 1.

Это уравнение не имеет корней. Если а = -1, то имеем уравнение 0х = 0, корнем которого может служить любое число.

Ответ: при **а** $\ne 0$ и **а** $\ne $-1 уравнение имеет единственный корень х = 1/а; при а = 0 корней нет; при а = - 1 уравнение имеет бесконечное число корней, его корнем является любое число.

Пример 2.Решим квадратное уравнение: $х^{2}$- вх + 4 = 0.

Найдем дискриминант уравнения: Д = $в^{2}$- 16. Если **в** по модулю больше 4, т.е. если  **в** меньше -4 или **в** больше 4, то **Д** больше нуля. В этом случае уравнение имеет два корня:

$х\_{!;2}=\frac{-b\pm \sqrt{b^{2}-16}}{2}$.

Если в = -4 или в = 4, то уравнение имеет единственный корень х = в/2. Если в больше -4 и меньше 4, то **Д** меньше нуля и уравнение корней не имеет**.**

Ответ: при в$<$ -4 или в$>$4 уравнение имеет два корня : $ х\_{1;2}$= $\frac{-b\pm \sqrt{b^{2}-16}}{2}$;

 при в = -4 и в = 4 уравнение имеет единственный корень х = $\frac{в}{2}$;

 при -4 $<$ в $<4$ уравнение корней не имеет.

Пример 3. Решим относительно **х** уравнение: $\frac{сх^{2}}{15}$ - $\frac{х(2с-1)}{2}$ = $\frac{3-с}{3}$.

Приведем уравнение к целому виду: с$х^{2}$- 6сх + 3х = 15 -5с.

Рассмотрим два случая, когда с = 0 и с$ \ne 0$.

 Если с = 0, то имеем линейное уравнение 3х = 15. Отсюда х = 5.

Если с $\ne 0, $то имеем квадратное уравнение : с$х^{2}$- 3(2с – 1)х – (15 – 5с) = 0.

Найдем дискриминант уравнения Д = 9 $(2с-1)^{2}$+ 4с(15 – 5с) = 16 $х^{2}$ + 24с + 9 = $(4с+3)^{2}$.

При 4с + 3$\ne 0, т.е. с\ne -\frac{3}{4}$, уравнение имеет два корня:

$х\_{1}$ = $\frac{6с-3-(4с+3)}{2с}$ = $\frac{2с-6}{2с}$ = $\frac{с-3}{6}$, $х\_{2}$ = $\frac{6с-3+(4с+3)}{2с}$= $\frac{10с}{2с}$ = 5.

При 4с + 3 = 0, т.е. с = - $\frac{3}{4}$ уравнение имеет единственный корень: х = $\frac{6с-3}{2с}$= 5.

Ответ: при с$ \ne 0$ и с $\ne $ - $\frac{3}{4}$ уравнение имеет два корня: $х\_{1}$= $\frac{с-3}{с}$ и $х\_{2}$= 5 ;

 при с = - $\frac{3}{4}$ уравнение имеет единственный корень х = 5.

Пример 4. Решим относительно **х** уравнение: х- ху + 5у = 7 в целых числах.

Решим это уравнение относительно **х**, т.е. букву **у** будем считать параметром. Имеем:

 х – ху = 7 – 5у,

х(1 – у) = 7 – 5у,

х = $\frac{5у-7}{у-1}$ .

Выделим из дроби $\frac{5у-7}{у-1}$ целую часть: $\frac{5у-7 }{у-1}$= $\frac{5у-5-2 }{у-1}$= $\frac{5\left(у-1\right)}{у-1}$ - $\frac{2}{у-1}$= 5 - $\frac{2}{у-1}$.

Итак, х = 5 - $\frac{2}{у-1}$. Дробь $\frac{2}{у-1}$ обращается в целое число лишь при тех значениях **у**, при которых у – 1 является делителем числа 2, т.е. при **у**, равном -1; 0; 2 или 3. Вычислим соответствующие значения **х**:

$х\_{1}$= 5 - $\frac{2}{-2}$ = 6; $х\_{2}$= 7; $х\_{3}=3; $ $х\_{4}$= 4. Для каждого значения **х** найдем соответствующее ему значение **у**. Для этого выразим из данного уравнения **у** через **х** : ху – 5у = х -7,

 у(х – 5) = х – 7, у = $\frac{х-7}{х-5}$ . Подставляя в эту формулу последовательно $х\_{1 }; х\_{2 }; х\_{3} ; х\_{4}$ найдем соответствующие значения **у**: $у\_{1}= -$1 ; $у\_{2}$= 0 ; $у\_{3}$ = 2 ; $х\_{4}=3.$

Ответ: $х\_{1}$= 6, $у\_{1}$ = - 1,

 $х\_{2}$= 7 , $у\_{2}$= 0 ,

 $х\_{3}$ = 3 , $у\_{3}$= 2 ,

 $х\_{4}$= 4 , $у\_{4}$= 3.